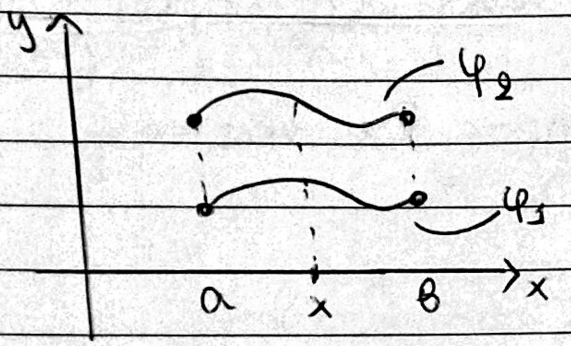
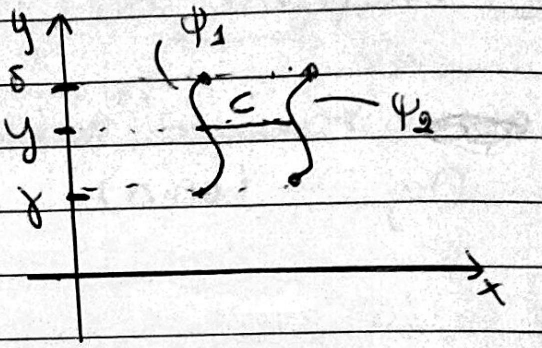
25/04/2017

Μάθημα 11ο
Απει4

<u>Ορισμός</u>: Αν $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>συνεχείς</u> με $\varphi_1 \leq \varphi_2$
το $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ , \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \} \subset \mathbb{R}^2$
ονομάζεται κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα των x (Ox)
Αντίστοιχα, ορίζεται κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα των y (Oy)
$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \gamma \leq y \leq \delta \ , \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \} \subset \mathbb{R}^2$



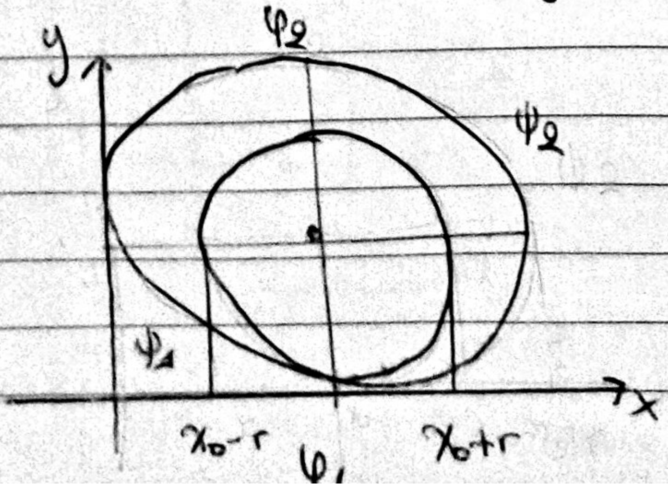


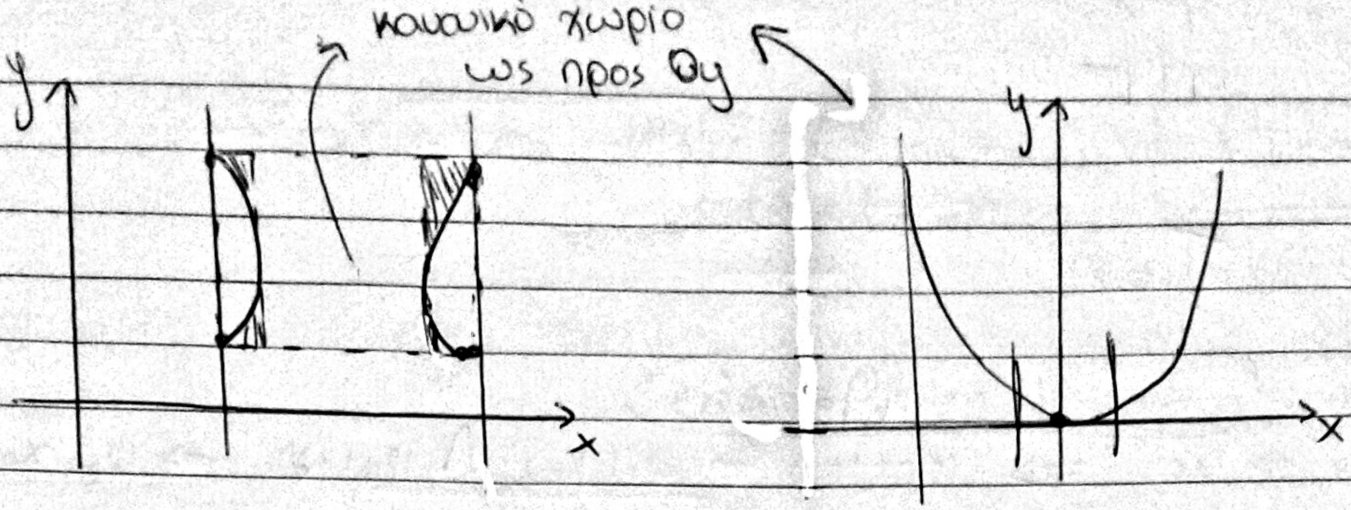
Αν ένα σύνολο μπορεί να γραφεί και με τους δύο τρόπους λέμε ότι είναι κανονικό χωρίο ως προς Ox και Oy (ή κανονικό χωρίο)

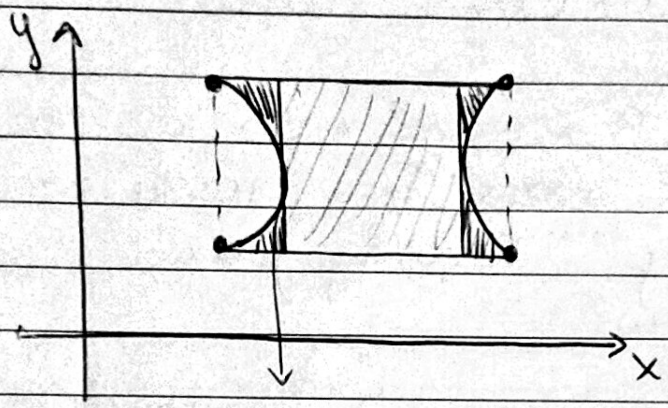
<u>πχ</u> ο κυκλικός δίσκος : $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2 \}$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0 - r, x_0 + r] \ , \ y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} \leq y \leq \underbrace{y_0 + \sqrt{r^2 + (x-x_0)^2}}_{\varphi_2(x)} \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [y_0 - r, y_0 + r] \ , \ x_0 - \sqrt{r^2 - (y-y_0)^2} \leq x \leq \underbrace{x_0 + \sqrt{r^2 + (y-y_0)^2}}_{=:\psi_2(y)} \}$$







κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα Ox

Πρόταση: Τα κανονικά χωρία είναι Jordan-μετρήσιμα και συμπαγή.

($\xrightarrow[\text{Lebesgue}]{\text{κριτήριο}}$ αν f συνεχής πάνω σε ένα κανονικό χωρίο τότε η f ολοκληρώσιμη)

Απόδειξη.
Αφού οι $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς είναι και φραγμένες $\Longrightarrow$ B είναι φραγμένο. Επίσης, το σύνορο του B έχει μηδενικό περιεχόμενο $\Longrightarrow$ B J-μετρήσιμο
Μένει να δείξε αν είναι κλειστό
Έστω μια ακολουθία $(x_\nu, y_\nu) \in B$, $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
Θ.ν.δ.ο. $(x_0, y_0) \in B$
$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 , x \in [a,b] , \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$
$\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς
$(x_\nu, y_\nu) \in B \iff x_\nu \in [a,b] \wedge \varphi_1(x) \leq y_\nu \leq \varphi_2(x_\nu)$
$(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \iff x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0$

Αφού, λοιπόν, $x_\nu \in [a,b]$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $x_\nu \to x_0 \in \mathbb{R}$

$\xrightarrow[\text{[a,b] κλειστό (στο } \mathbb{R})]{} x_0 \in [a,b]$

Επίσης, αφού φ_1, φ_2 συνεχείς

$x_\nu \to x_0 \implies \varphi_1(x_\nu) \to \varphi_1(x_0) \wedge \varphi_2(x_\nu) \to \varphi_2(x_0)$

και τέλος, $\varphi_1(x_\nu) \leq y_\nu \leq \varphi_2(x_\nu)$

SOS 4: Θεώρημα: Έστω B κανονικό χωρίο ως προς Ox ($B \subset \mathbb{R}^2$) και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει το

$$\int_B f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Απόδειξη: B J-μετρ. και συμπαγές, f συνεχής $\xrightarrow{\text{κρ. Lebesgue}}$ $\exists \int_B f > 0$

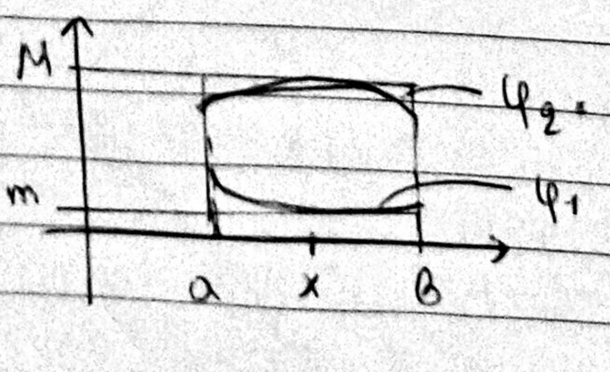
Αν $m = \min \varphi_1$, $M = \max \varphi_2$

$B \subset [a,b] \times [m_1, m_2] =: A$ και άρα $\int_B f = \int_A f_B(x,y)\, d(x,y)$ (*)

$$f_B(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in B \\ 0, & (x,y) \notin B \end{cases}$$

Επίσης, $\forall$ (σταθερό) $x \in [a,b]$:

$$\exists \int_m^M f_B(x,y)\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy$$



Άρα, (*) $\xrightarrow{\text{Fubini}}$ $\int_A f_B = \int_a^b \left(\int_m^M f_B(x,y)\,dy \right) dx$

Παρατήρηση: Αντίστοιχα, αυτό ισχύει και για κανονικό χωρίο ως προς y $\Longrightarrow$ Αν έχουμε κανονικό χωρίο ως προς x και ως προς y ισχύει:

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_\gamma^\delta \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Παράδειγμα: Είδαμε την προηγούμενη φορά ότι ο όγκος της μπάλας $M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq r^2 \}$ είναι $V(M) = 2\int_\Delta \underbrace{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}_{=f(x,y)}\,d(x,y)$

όπου $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2 \}$

Αφού Δ κανονικό χωρίο ως προς Ox,

$\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0-r, x_0+r],$
$y_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \leq y \leq y_0 + \sqrt{r^2+(x-x_0)^2} \}$

έχουμε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα

$$V(M) = 2\int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(\int_{y_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{r^2(x-x_0)^2}} \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\,dy \right) dx =$$

$$= 2\int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-\eta^2}\,d\eta \right) dx =$$

$$\underline{\underline{\xi = x - x_0}} \quad 2\int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-\xi^2}}^{\sqrt{r^2-\xi^2}} \sqrt{r^2-\xi^2-\eta^2}\, d\eta\right) d\xi =$$

$$= 4\int_{-r}^{r}\left(\int_{0}^{\sqrt{r^2-\xi^2}} \sqrt{r^2-\xi^2-\eta^2}\, d\eta\right) d\xi =$$

$$= 8\int_{0}^{r}\underbrace{\left(\int_{0}^{\boxed{\sqrt{r^2-\xi^2}}=a} \sqrt{\underbrace{r^2-\xi^2}_{=a^2}-\eta^2}\, d\eta\right)}_{=\frac{\pi}{4}a^2 = \frac{\pi}{4}(r^2-\xi^2)} d\xi =$$

$$= 2\pi\int_{0}^{r}(r^2-\xi^2)\, d\xi = 2\pi\underbrace{\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)}_{=\frac{2r^3}{3}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Το οποίο είναι (προφανώς) το ίδιο με αυτό που υπολογίσαμε (νομίζω πιο απλά) με τον Αρχή του Cavalieri)

<u>Παρατήρηση / Ορισμός / Πρόταση :</u>

Η έννοια του κανονικού χωρίου γενικεύεται και σε διαστάσεις $n \geq 3$

π.χ. για $n=3$ έχουμε τον εξής ορισμό:

Αν $B \subset \mathbb{R}^2$ είναι συμπαγές και J-μετρήσιμο και $\chi_1, \chi_2 : B \to \mathbb{R}$ <u>συνεχείς</u> με $\chi_1 \leq \chi_2$ τότε το $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B,\ \chi_1(x,y) \leq z \leq \chi_2(x,y)\}$ λέγεται κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο Oxy κι αν $f : M \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη με $\int_M f(x,y,z)\, d(x,y,z) =$

$$= \int_B \left(\int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right) d(x,y)$$

Παράδειγμα:

Η μπάλα $M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \le r^2\}$

$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in\Delta,\ \underbrace{z_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}_{=\chi_1(x,y)} \le z \le \underbrace{z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}_{=\chi_2(x,y)}\}$$

με Δ ο κυκλικός δίσκος ($\Rightarrow \Delta\subset\mathbb{R}^2$ κανονικό χωρίο $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ συμπαγές και J-μετρήσιμο) $\Rightarrow$ η μπάλα M είναι κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο Oxy
(αλλά και ως προς Oyz, Oxz, δηλ. είναι κανονικό χωρίο στον $\mathbb{R}^3$)

$$\Longrightarrow V(M) = \int_M 1\, d(x,y,z) \overset{\text{παρατ.}}{=} \underbrace{\int_\Delta}_{(*)} \left(\int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} 1\, dz \right) \underbrace{d(x,y)}_{(**)} =$$

$$= \int_\Delta \underbrace{\left(\chi_2(x,y) - \chi_1(x,y)\right)}_{=2\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}} d(x,y)$$

$$(*) = \int_{x_0-r}^{x_0+r} \int_{y_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} \ldots\ dy\, dx <$$

Άσκηση 121: Υπολογίστε τον όγκο του σώματος μεταξύ του επιπέδου $z = \underbrace{x+y}_{=f(x,y)}$ και του ορθογωνίου $[0,1]\times[0,2]$ (στον $\mathbb{R}^2$)

Λύση.

$$M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in \overbrace{[0,1]\times[0,2]}^{B},\ \overset{\chi_1(x,y)}{\overset{\shortparallel}{0}} \le z \le \overset{\chi_2(x,y)}{\overset{\shortparallel}{x+y}}\}$$

κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο Oxy

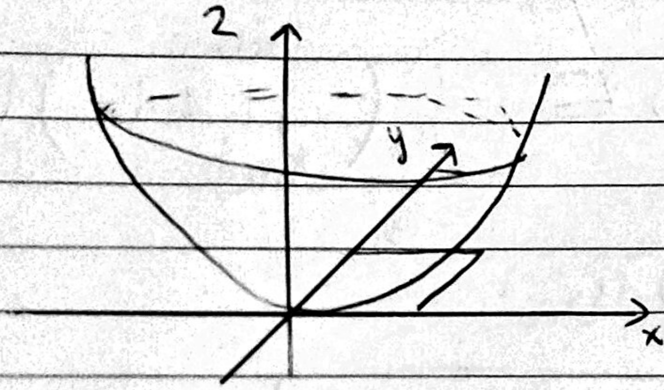
$$\Longrightarrow V(M) = \int_M 1\, d(x,y,z) = \int_{[0,1]\times[0,2]} \underbrace{\left(\int_0^{x+y} 1\, dz \right)}_{=x+y} d(x,y) =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 (x+y)\, dy \right) dx = \int_0^1 (2x+2)\, dx = 3$$

<u>Άσκηση 122</u>: Υπολογίστε τον όγκο του σώματος που βρίσκεται κάτω από το (παραβολοειδές) $z = x^2 + y^2$ και πάνω από το $[0,1] \times [0,1]$

Λύση

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [0,1] \times [0,1] ,\ 0 \le z \le x^2 + y^2 \}$$



$$\underbrace{V(M)}_{\substack{\| \\ \int_M 1\, d(x,y,z)}} = \int_{[0,1]\times[0,1]} \Big(\underbrace{\int_0^{x^2+y^2} 1\, dz}_{\| \\ x^2+y^2} \Big) d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\, dx \right) dy$$

$$= \ldots = \frac{2}{3}$$

<u>Άσκηση 123</u>: Υπολογίστε τον όγκο του σώματος κάτω από την $z = xy^2 + y^3$ και πάνω από το $[0,2] \times [0,2]$

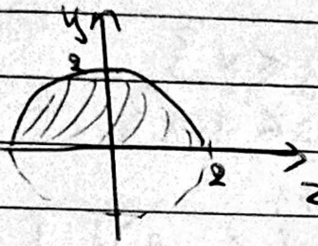
Λύση.

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [0,2] \times [0,2] ,\ 0 \le z \le xy^2 + y^3 \}$$

$$\Rightarrow V(M) = \int_M 1\, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{xy^2+y^3} 1\, dz\, dx\, dy = \frac{40}{3}$$

Άσκηση 127: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα και σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης

(α) $\int_B \underbrace{(x^2y)}_{=f(x,y)} d(x,y)$, όπου B το άνω μέρος του κυκλικού δίσκου κέντρου (0,1), ακτίνας 2



$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \overbrace{[-2,2]}^{=[a,b]},\ \underbrace{0}_{=\varphi_1(x)} \le y \le \underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{=\varphi_2(x)} \}$$

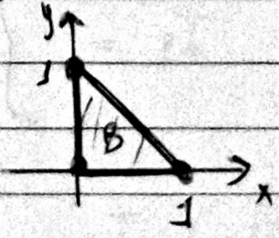
κανονικό χωρίο ως προς Ox

$$\Rightarrow I_a = \int_{a=-2}^{b=2} \int_{\varphi_1(x)=0}^{\varphi_2(x)=\sqrt{4-x^2}} (x^2y)\,dy\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_a = \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} x^2 \frac{4-x^2}{2}\,dx = \dots = \frac{64}{15}$$

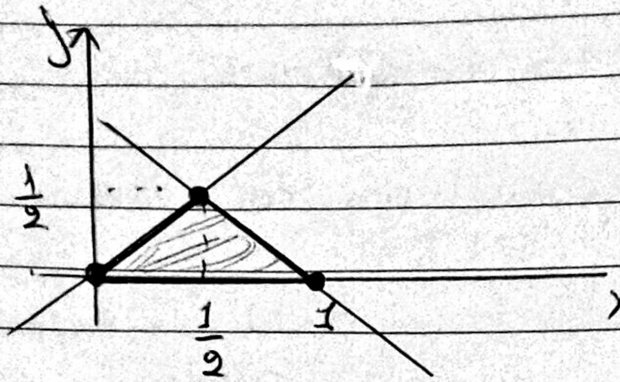
(β) $I_\beta = \int_B (x+y^2)\,d(x,y)$, B το τρίγωνο με γωνίες (0,0), (1,0), (0,1)



$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ 0 \le y \le 1-x \}$$

$$\Rightarrow I_\beta = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y^2)\,\underline{dy}\,dx = \dots = \frac{1}{4}$$

(γ) $I_\gamma = \int_B (x^2+y^2)\,d(x,y)$, B το τρίγωνο με γωνίες (0,0), (1,0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



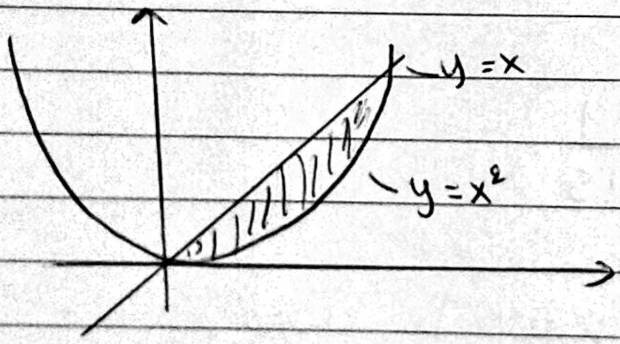
$$I_\gamma = \int_{B_1} (x^2+y^2)\,d(x,y) + \int_{B_2} (x^2+y^2)\,d(x,y)$$

όπου, $B_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1/2] , 0 \le y \le x \}$

$B_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1/2, 1] , 0 \le y \le 1-x \}$

$$I_\gamma = \int_0^{1/2} \int_0^{x} (x^2+y^2)\,dy\,dx + \int_{1/2}^{1} \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \dots = \frac{1}{12}$$

(δ) $I_\delta = \int_B xy\,d(x,y)$, B το χωρίο το πρώτο τεταρτημόριο μεταξύ της ευθείας $y=x$ και της παραβολής $y=x^2$

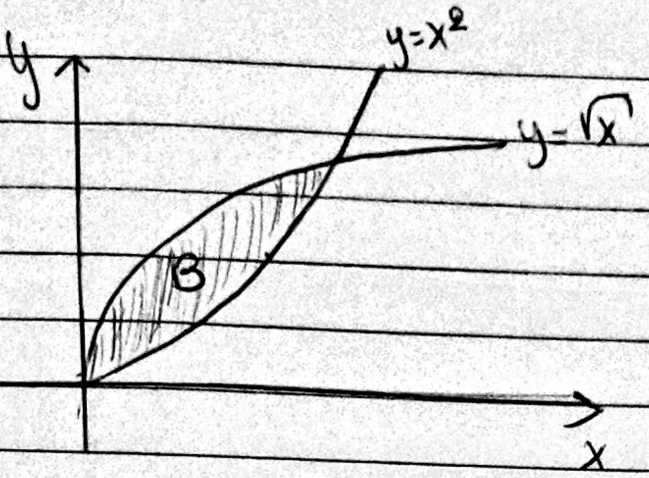


$x = x^2 \overset{x>0}{\iff} x = 1.$

$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] , x^2 \le y \le x \}$

$$I_\delta = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy\,dy \right) dx = \dots = \frac{1}{24}$$

(ε) $I_\varepsilon = \int_B \sqrt{x}\, y\, d(x,y)$, με B το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο μεταξύ των παραβολών $y = \sqrt{x}$ και $y = x^2$



$$\Rightarrow I_E = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\, y\, dy \right) dx = \dots = \frac{6}{55}$$